

朝鮮數學家南秉吉《九章術解》校勘整理與綜合分析

英家銘

(台灣師範大學數學系博士候選人)

提要 本文對朝鮮數學家南秉吉 (Nam Pyöng-Gil, 1820-1869) 所著之《九章術解》，進行全本書的校勘整理，以及對南秉吉的註解做一綜合分析。《九章術解》是南秉吉為中國古代算學經典《九章算術》所做的註解書。在比較《九章術解》與中國清代四個不同版本的《九章算術》之後，可知孔繼涵所刻微波榭本《九章算術》(1777 年) 應是南秉吉所根據的底本。

南秉吉在書中並未收錄劉徽與李淳風的註解，僅僅將自己的註釋置於《九章算術》各題術文之後。南秉吉的註解有四個特點：第一、引入《數理精蘊》中的「西法」；第二、保留部分中國古法；第三、有部分南秉吉自身的創見；第四、有少數關於數學論證與註釋的不足之處。

從南秉吉註解的風格來看，他對數學的觀點頗為自由，不拘泥於傳統方法或西法；此外，他並未如劉徽註解《九章算術》那樣嘗試建立自己的數學體系，而僅是為了要清楚地說明《九章算術》術文的意義與數學方法。

關鍵詞：南秉吉、中韓數學交流、《九章術解》

壹、導論

在東亞科學史與數學史的研究領域中，數學知識跨國界的交流 (transmission) 與轉化

(transformation) 一直是重要的課題。中算與東算 (*tongsan*, 韓國本土數學) 之間, 由於分享了重疊的數學文化脈絡 (例如使用相同的曆法與數學語言), 所以雙方的交流亦為有趣的研究題材。然而, 韓國數學家並不只是被動的吸收中國數學, 他們參與中國數學家討論的議題, 並嘗試將中國傳入的算法與本土結合, 也對中國傳入的算書提出新解。¹本文的主角《九章術解》就是新解的一例。

朝鮮數學家南秉吉 (Nam Pyōng-Gil, 1820-1869) 所著之《九章術解》, 書名就告訴我們, 這是他對中國算學經典《九章算術》的註解, 各章順序與《九章算術》相同: 方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈朒、方程與勾股。在本文中, 我們會從「內在論的進路」(internalistic approach) 出發, 探討《九章術解》所可能依據的底本, 以及討論南氏在全本註釋的內容分析, 希望讓讀者可以對全書內容做一次鳥瞰。此外, 我們還希望從南秉吉註解的分析中, 瞭解他的數學素養與數學觀, 進而探索他如何看待與學習由中國傳入的算學, 甚至轉化為本土的數學知識。總之, 正如南秉吉的其他算學著作, 針對此一案例的深入研究, 一定可以有助於我們更深刻認識中韓數學文化交流。

貳、文獻探討

有關南秉吉的研究, 主要為韓國數學史家金容雲、金容局, 台灣數學史家洪萬生等學者, 以及數名台灣師範大學碩士班畢業生的研究成果。這些成果讓筆者對《九章術解》的研究有一個寬廣的立足點。筆者將所收集到的論文與專書整理如下:

- (1). 金容雲、金容局, 《韓國數學史》, 槓書店 (東京), 1978 年。
- (2). Horng, Wann-Sheng. "Sino-Korean transmission of mathematical texts in the 19th century: A case study of Nam Pyong-gil's *Kugo Sulyo Tohae*", *Historia Scientiarum* 12(2), The History of Science Society of Japan (Tokyo), 2002, pp. 87-99.
- (3). 洪萬生, 〈《無異解》中的三案初探: 一個 HPM 的觀點〉, 《科學教育學刊》, 中華民國科學教育學會 (高雄), 2000 年, 第三期, 頁 215-224。
- (4). 洪萬生, 〈數學文化的交流與轉化: 以韓國數學家南秉吉 (1820-1869) 的《算學正義》為例〉, 《師大學報: 人文與社會類》, 國立台灣師範大學 (台北), 2003 年, 第一期, 頁 21-38。
- (5). 張復凱, 《從南秉吉(1820~1869)《緝古演段》看東算史上天元術與借根方之「對話」》, 國立台灣師範大學數學系碩士論文 (未出版), 2005 年。
- (6). 郭守德, 《朝鮮算學家·南秉吉《測量圖解》初探》, 國立台灣師範大學數學系碩士論文 (未出版), 2007 年。
- (7). 陳春廷, 《東算家南秉吉《算學正義》之內容分析》, 國立台灣師範大學數學系碩士論文 (未出版), 2007 年。

另外, 有關《九章術解》的校勘研究, 主要是由 HPM 通訊團隊的蘇俊鴻等人, 在 2002

¹ 洪萬生, 〈十八世紀東算與中算的一段對話: 洪正夏 vs. 何國柱〉, 《漢學研究》, 漢學研究中心 (台北), 2002 年, 第二期, 頁 58。

至 2003 年之間，完成了卷一至卷八的校勘與南秉吉的註解分析。已發表文章如下：

- (1). 蘇俊鴻，〈韓國數學文本《九章術解》卷一校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2002 年，第十一期，頁 3-7。
- (2). 陳鳳珠，〈《九章術解》卷二校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2002 年，第十一期，頁 8-12。
- (3). 蘇意雯，〈《九章術解》卷三校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2002 年，第十二期，頁 3-7。
- (4). 蘇惠玉，〈《九章術解》卷四校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2002 年，第十二期，頁 8-10。
- (5). 楊瓊茹，〈《九章術解》卷五校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2003 年，第一期，頁 3-7。
- (6). 葉吉海，〈《九章術解》卷六校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2003 年，第一期，頁 8-13。
- (7). 黃清揚，〈《九章術解》卷七校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2003 年，第二、三期，頁 1-4。
- (8). 林倉億，〈《九章術解》卷八校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2003 年，第二、三期，頁 4-9。

至於卷九「勾股」的校勘與內容分析，亦見於謝佩珍的在台灣師範大學的碩士論文：《韓國勾股術發展之研究》（2003）。然而，在謝佩珍的論文中，有關卷九內容與《九章算術》各版本的比較，以及對南秉吉在全書中註解的分析，則著墨甚少。因此，筆者將在本文中補其不足，並嘗試將前八卷的校勘結論之重點，與卷九的校勘融合，再提供南秉吉註解的綜合分析。

參、底本探討與卷九校勘

在探討《九章術解》內容之前，一個很自然的問題是，南秉吉是根據《九章算術》的哪一個版本作為底本加以註解？如果我們能回答這個問題，也許能為近代中國與朝鮮數學交流的拼圖，補上小小的一片。

為了解決此一底本的問題，筆者蒐羅現存《九章算術》的版本來做比對。筆者用來與之對照的版本有：戴震所校武英殿聚珍版《九章算術》（1774 年）、《四庫全書》中的文淵閣本《九章算術》（1784 年）、孔繼涵所刻微波榭本《九章算術》（1777 年），以及李潢著《九章算術細草圖說》（1820 年）等四種。²（以下將上述四版本簡稱為聚珍本、四庫本、微波榭本、李潢校本）。

² 現存最早的《九章算術》為南宋鮑澣之刻本，目前僅存前五卷。清初汲古閣主人毛扆影抄錄這半部，世稱汲古閣本。明代編纂的《永樂大典》（1408 年）所包含的《九章算術》的底本與鮑澣之刻本不同。清乾隆三十八年（1773）編纂《四庫全書》，次年戴震從《永樂大典》中輯出《九章算術》，校勘後刻入《武英殿聚珍版叢書》，並於 1784 年抄入《四庫全書》。乾隆四十一年，戴震取聚珍版的底本，以汲古閣本參校，重校《九章算術》。次年，其前五卷以汲古閣本為底本，再次校勘，由曲阜孔繼涵刻入微波榭本《算經十書》。後來李潢以微波榭本為底本，作《九章算術細草圖說》。以上引自郭書春，〈九章算術題要〉，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊，河南教育出版社（鄭州），1993 年，頁 79-87。

就以卷九的內容為例，《九章術解》與上述四版本，除了幾個如「勾股」與「句股」，「邪」與「斜」等同義字的差別之外，總共有三十餘處差異，請參閱本文末附錄。

綜觀附錄中所列之差異，我們可以看出，《九章術解》與戴震所校之聚珍本與四庫本文字差異甚多，這兩者是南秉吉所用底本的可能性較低。針對整個卷九，《九章術解》的正文比起微波榭本，除同義字外僅有兩處小差異，加上前八卷，亦僅有十三處差異（除卷四「少廣」章內，《九章術解》漏錄一問之外，其餘均非大差異）。³所以，相較於其他版本，微波榭本較有可能是南秉吉所參考的底本。前八卷校勘作者如蘇俊鴻等人的結論，也大多認為《九章術解》與聚珍本、四庫本互異之處遠比微波榭本、李潢校本多。事實上，戴震所做的校勘，本身有很多的錯誤，在卷九也出現不少，且都與南秉吉書中的文字不同，所以，南秉吉可能是採用戴震自己或他人重新校勘過的版本，因為南秉吉書中的字句，從數學上來看大多是正確的。

然而在《九章術解》全書，至少有兩題的答案，在聚珍本與四庫本中是正確的，但南秉吉卻寫下錯誤的答案，且錯誤與微波榭本所給的相同，這兩題是卷九第 4 與 7 題。而李潢的校本中，卷九的兩題雖然也寫下錯答，但是，李潢都在答案後面加上「潢按」給出正確答案。南秉吉應該不太可能將他人正確的答案改成錯誤，比較可能是他未仔細驗算，直接將錯誤的答案抄錄。另一個類似的錯誤，則出現在卷五第 5 題（春程人工）中，這題的答案雖然四個版本皆有相同的錯誤，《九章術解》也將其抄錄，但李潢的按語有改正錯誤。⁴至此，我們幾乎可以排除聚珍本、四庫本與李潢校本是底本的可能性。

此外，尚有兩個單獨支持微波榭本的證據，是在《九章術解》卷一與卷九。在卷一中，南秉吉在「平分術」的註解上，所使用的文句形式與戴震〈《九章算術》卷一訂訛補圖〉對平分術補充的內容雷同，而上述五個版本中，只有微波榭本收入戴震的訂訛補圖。⁵至於《九章術解》卷九的第十二題，這一題各版本的位置不同，聚珍本與四庫本的這一題在卷末，而微波榭本與李潢校本則和《九章術解》位置相同。根據郭書春的匯校，這一題是在微波榭本中才被移到此處，其後諸本隨之以此順序編排。⁶如果《九章術解》的底本不是微波榭本，也應該是根據微波榭本所衍生出來的版本。然而，根據郭書春的研究，現存的《九章算術》版本中，以微波榭本為底本，且時代在南秉吉同時或之前的，只有李潢校本。⁷但顯然南氏並未讀到李潢校本。

綜上所述，雖然《九章術解》與各版本均有差異，但與微波榭本差異最少，再加上數個單獨支持微波榭本的證據，包含僅在微波榭本出現的錯誤與註解。所以，筆者認為，微波榭本極有可能就是南秉吉據以寫成《九章術解》所參考的底本。

肆、南秉吉註解的內容分析

³ 蘇惠玉，〈《九章術解》卷四校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2002 年，第十二期，頁 10。

⁴ 楊瓊茹，〈《九章術解》卷五校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2003 年，第一期，頁 4。

⁵ 蘇俊鴻，〈韓國數學文本《九章術解》卷一校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2002 年，第十一期，頁 3-4。

⁶ 郭書春、劉鈍點校，《算經十書》，九章出版社（台北），2001 年，頁 244。

⁷ 郭書春，《古代世界數學泰斗劉徽》，明文書局（台北），1995 年，頁 439。

在《九章術解》全書中，除了將《九章算術》的問題與術文如實抄錄之外，最重要的內容就是南秉吉自己對術文的註解。南秉吉寫給這本書的跋說得很清楚：

九章算術，數學之鼻祖也，劉徽注之，李淳風釋之，然俱多未曉處，抑或繡出鴛鴦而藏其金針之意歟，注釋所以啟來者，而終莫能端倪。故余因原術解之，發明其萬一，未敢為覺後覺，而使好學者庶其易曉云爾。⁸

可見，南秉吉不完全滿意劉徽與李淳風的註釋，他希望學習者可以更容易理解《九章算術》原本的術文。

另外有一點值得注意的是，本書卷九的內容是勾股術，而要討論南秉吉對勾股問題的註解，就必須要去比對南氏另一本關於勾股術的專門著作：《劉氏勾股述要圖解》。⁹這本書中有 224 個解勾股形的問題，而《九章術解》有 15 題的數學內容與《劉氏勾股述要圖解》的內容有重疊，我們也會將部分加以比較。

下面，筆者會將前八卷校勘者的評論綜合，加上筆者自己的考察意見，以及對卷九的分析評論，整理出一個南氏註解的大致圖像。

一、《數理精蘊》中「西法」的引入

南秉吉的註解中，第一個重要的特點，就是透過《數理精蘊》的西方數學知識，來詮釋自古流傳於中國與朝鮮的《九章算術》。¹⁰在《九章術解》各章之中，有許多註解明顯地是以《數理精蘊》的內容來解釋，其他才是劉、李註釋的保留或南秉吉自己的創見。

《數理精蘊》(1723 年)是一部百科全書式的著作，介紹 18 世紀時已傳入中國的西方數學。《數理精蘊》傳入韓國最早的紀錄，是在 1729 年，即此書出版之後僅僅六年。明清兩代，中國科技書籍通常在出版不久就會傳入韓國，這並不令人意外，因為朝鮮王朝的王室與知識份子總是傾全力要追趕中國最進步的學術標準。¹¹《數理精蘊》傳入朝鮮後，在十八到十九世紀成為朝鮮國內最具有影響力的算學經典。¹²

南秉吉註釋中的引用的西方數學概念，最明顯的是關於圖形的使用。數學史家金容雲、金容局認為《九章術解》「図解を示している点が特徴的であるといえる」。¹³然而，《九章術解》全書只有三處圖示，比起例如朝鮮王朝算學取才科目之一，內有大量圖示的《楊輝

⁸ 南秉吉，《九章術解》，頁 495。

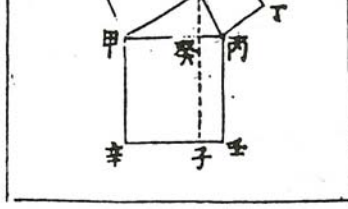
⁹ 南秉吉，《劉氏勾股述要圖解》，收入金容雲主編，《韓國科學技術史資料大系 - 數學篇(6)》，驪江出版社(首爾)，1985 年。

¹⁰ 康熙御制，《數理精蘊》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第三分冊，河南教育出版社(鄭州)，1993 年。

¹¹ Jun, Yong Hoon, "Mathematics in context: A case study in early nineteenth-century Korea", Science in Context 19, Cambridge University Press (Cambridge), 2006.

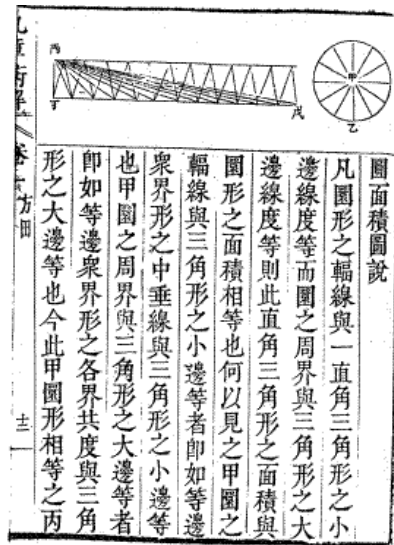
¹² Oh, Young Sook. "Suri chōngon pohae (數理精蘊補解): An 18th Century Korean Supplement to Shuli jingyun (數理精蘊)". In W. S. Horng, Y. C. Lin, T. C. Ning & T. Y. Tso (Eds.). *Proceedings of Asia-Pacific HPM 2004 Conference*, Taichung: National Taichung Teachers College (Taichung), 2004.

¹³ 本句意為：「用圖解表示這一點可說是它的特徵」。參見金容雲、金容局，《韓國數學史》，槓書店(東京)，1978 年，頁 270。

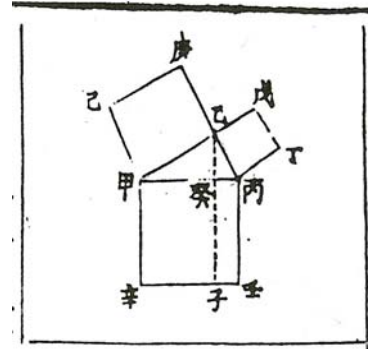


圖二

算法》來說，以圖形來說明，或許不能說是本書與古算書相異的特徵。¹⁴筆者認為，《九章術解》的特徵，不是加入圖形，而是對圖形使用方式的不同。



圖一



圖二

《九章術解》中的三幅圖示，第一幅是卷一中的「圓面積圖說」（如圖一），其文字說明，與《數理精蘊》上編卷二第二十二條圓面積公式的內容大致相同，圖形也類似。¹⁵第二幅圖示在卷九開頭的勾股定理證明（如圖二），與《數理精蘊》下編卷十二對畢氏定理的證明相同，圖亦類似，都是先從直角頂作斜邊垂線，再使用相似三角形來證明兩股上的正方形面積和為斜邊上的正方形面積。¹⁶第三幅在同卷 12 題，其圖形與證明亦與《數理精蘊》下編卷十二第十問相同。¹⁷在南秉吉的《劉氏勾股述要圖解》中，也有與第二幅相同的圖形，勾股定理的證明方法也相同。

上述三幅圖，以及《劉氏勾股述要圖解》中的所有附圖，不只是以圖形註解，同時也承繼西方數學中圖形的特徵，那就是：每個圖形基本上是「靜止的」，每個頂點都有名稱，頂點的名稱會用來明確指出圖形的某部分，而數學家會從圖形上面的配置與各組成成分之間的關係，去推得欲證的結果。這有什麼特別的呢？當我們把這些圖放到中算與東算的脈絡之下，我們就能看出，南秉吉所受到的西方數學影響。數學史家琅元 (Alexei Volkov) 認為，中算家對圖形的運用，主要是強調圖形的轉換 (transformation)。¹⁸最明顯的例子，就

¹⁴ 楊輝，《楊輝算法》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊，河南教育出版社（鄭州），1993 年。

¹⁵ 南秉吉，《九章術解》，頁 281。亦參見蘇俊鴻，〈韓國數學文本《九章術解》卷一校勘〉，頁 5。

¹⁶ 南秉吉，《九章術解》，頁 476。這個方法與歐幾里得《幾何原本》的方法是不同的，因為《幾何原本》的畢氏定理在卷一，尚未討論到相似形，請參閱 Heath, Thomas L. *Euclid: Thirteen Books of The Elements*. New York: Dover Publications, INC (New York), 1956.

¹⁷ 南秉吉，《九章術解》，頁 483。

¹⁸ Volkov, Alexei. "Geometrical diagrams in traditional Chinese mathematics". In F. Bray, V. Dorofeeva-Lichtmann & G. Metallie (Eds.). *Graphics and Text in the Production of Technical Knowledge in China*, Brill (Leiden), 2007, pp.425-459.

是中算家不斷使用的「出入相補」、「以盈補虛」證明手法。在《楊輝算法》中，我們可以看到，面積公式的證明裡，常常是有給定的圖形，以及經過切割拼補之後的新圖形，不同圖形代表轉換的不同階段，圖形的本身有顏色來顯示不同的功能，並代表圖形的不同部分，但幾何圖形的頂點與邊並無名稱。所以，南秉吉對圖形的使用，已經帶有西方數學的特徵，與古代的中算圖形不同。

除了圖形之外，南秉吉也引用《數理精蘊》中的「四率法」——一率比二率等於三率比四率——來一貫地註解《九章算術》中的「粟米」、「衰分」、「均輸」與「盈不足」等四章的部分內容。粟米章中的簡單比例交換，與衰分、均輸章中按比例分配的算法，劉徽都將之歸結於「今有術」，意即：所求數 = (所有數 × 所有率) / 所有率。而南秉吉的註解則是：

此異乘同除及四率比例也。以原有之兩件相除，故為同除；以今有之一件乘之，故為

異乘。……以先有之二件為一率、二率，今有之二件為三率、四率，則一率比二率即

如三率比四率，故其數可以互求也。¹⁹

這段註解與《數理精蘊》中的解釋幾乎相同。²⁰另外，對「盈不足術」的註釋，南秉吉也採取與劉徽「齊同術」不同的方法，仍使用四率比例解釋，註釋中甚至還引用《數理精蘊》卷八「雙套盈朒」之「兩盈」的問題來說明。²¹從南氏對今有術與盈不足術的註釋，我們也可清楚地看出，他嘗試使用西法來引導讀者瞭解《九章算術》的內容。

二、部分「中法」的保留

大量使用《數理精蘊》中的內容，是南秉吉註解的特徵之一。然而，他並未全盤使用西法。很多題目的註解中，他仍然使用劉、李注，或是保有中算特色的方式來做註解。

南秉吉在註解《九章算術》粟米章的今有術時，是引用西法，但是在同章中的「其率術」與「反其率術」，南氏都引用了劉、李部分的注文。例如，他在註解「其率術」時說到：

實餘之術，即是貴者之術，故曰實貴。貴者少也。以貴者減法，則其餘為賤者之數，

故曰法賤。²²

這與劉徽的注文相仿。至於南氏對「反其率術」的註解：

其率者，錢多物少，以物為法，錢為實；反其率者，錢少物多，以錢為法，物為實，

¹⁹ 南秉吉，《九章術解》，頁 286。

²⁰ 陳鳳珠，〈《九章術解》卷二校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2002 年，第十一期，頁 9。

²¹ 南秉吉，《九章術解》，頁 432-433。亦參見黃清揚，〈《九章術解》卷七校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2003 年，第二、三期，頁 3。

²² 南秉吉，《九章術解》，頁 304。

與其率相反，故曰反其率也。²³

這段話與李淳風注文，也只有排列順序的不同。南氏註解兩術所給出的例子，也與劉徽注文例子相同。²⁴

再者，南秉吉在卷四少廣章的開方、開立方術的註解中，他並未使用《數理精蘊》所用的直式筆算方法，而是以使用籌算的「增乘開方法」來解釋。此處他很詳細地用中算的方法來解釋開方術。²⁵

另一個有趣的題目，是在卷九勾股章第 11 題。這一題南秉吉並未畫出圖形，但是從他的註釋中，他明顯地是在讓讀者想像一些圖形，來證明他要的結果。令人玩味的是，《數理精蘊》與《劉氏勾股述要圖解》都有類似的題目，且證明皆與劉徽的方法類似，但是，南氏在此處卻用了另一個方法證明。²⁶原本的術文很長，筆者以現代符號與輔助圖形說明如下：

這一題是從弦與勾股較求勾股。²⁷若令勾、股、弦分別為 a 、 b 、 c ，則本題的術文就是：

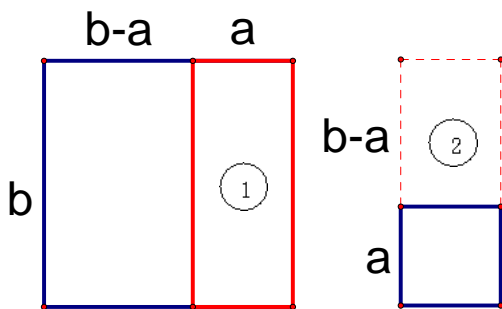
$$a = \sqrt{(c^2 - (\frac{b-a}{2})^2 \times 2) \times \frac{1}{2} - \frac{b-a}{2}}; \quad b = \sqrt{(c^2 - (\frac{b-a}{2})^2 \times 2) \times \frac{1}{2} + \frac{b-a}{2}}.$$

南秉吉的方法，是要先證明兩個恆等式：

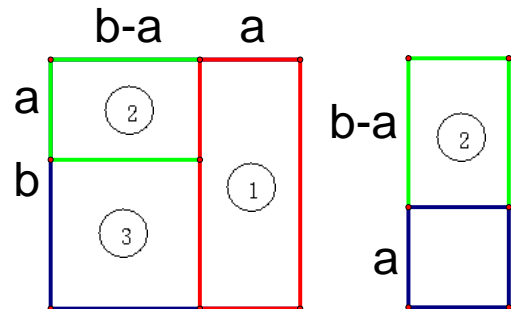
$$c^2 = 2ab + (b-a)^2; \quad (1)$$

$$ab + (\frac{b-a}{2})^2 = (\frac{b+a}{2})^2. \quad (2)$$

方法如下：對於(1)式，我們知道 $c^2 = b^2 + a^2$ ，所以，南氏先去分別比較 b^2 、 a^2 與 ab 的差異。如圖三，左邊的 b^2 比 ab 多出 $b(b-a)$ ，而右邊的 a^2 比起 ab 還不足 $a(b-a)$ ，即圖三的 2 號矩形。



圖三



圖四

接著，他用左邊多出來的部分，去填補右邊不夠的部分。如圖四，在左邊多餘的部分切出與 2 號矩形同樣大小的矩形，將之補到右邊 a^2 的上面，使之成為邊長分別為勾與股的矩形。最後，如圖五，原本的 $b^2 + a^2$ 變成兩個長寬分別為 a 與 b 的矩形，剩下的 3 號正方形邊長是 $b-a$ 。於是，我們得証 $c^2 = 2ab + (b-a)^2$ 。

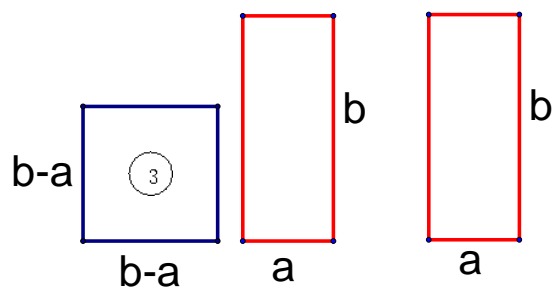
²³ 南秉吉，《九章術解》，頁 305。

²⁴ 陳鳳珠，《〈九章術解〉卷二校勘》，頁 10。

²⁵ 蘇惠玉，《〈九章術解〉卷四校勘》，頁 10。

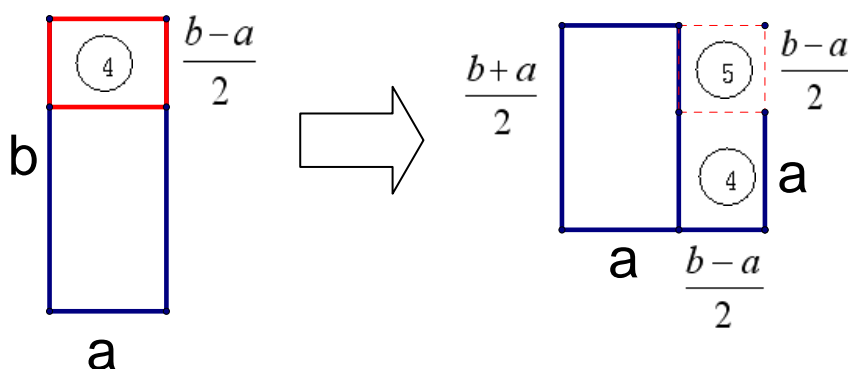
²⁶ 康熙御制，《數理精蘊》，頁 473-474；南秉吉，《劉氏勾股述要圖解》，頁 14-16。

²⁷ 所謂「勾股較」，即為勾與股之差。



圖五

(2)式也是用類似的手法。如圖六，將左方 ab 上面切下邊長為 $\frac{b-a}{2}$ 與 a 的矩形 (4 號)，移至右下角，再補上邊長為 $\frac{b-a}{2}$ 的正方形 (5 號)，即成邊長為 $\frac{b+a}{2}$ 的正方形。



圖六

證明完兩個恆等式之後，術文的程序就很容易解釋，首先， $c^2 - (\frac{b-a}{2})^2 \times 2$ ，根據(1)式就得到 $2ab + \frac{(b-a)^2}{2}$ 。將之除以 2，即得 $ab + (\frac{b-a}{2})^2$ ，由(2)式，這就是 $(\frac{b+a}{2})^2$ 。所以，開方之後，與 $\frac{b-a}{2}$ 相加減即可得勾與股。

上列圖形中的號碼與邊的名稱，都是筆者的解釋，南秉吉並未將它們編號，也未用顏色稱呼，他僅以文字敘述長方形的長、闊，以及圖形移補的方法。此處南秉吉的敘述，雖然沒有用到顏色，但是「出入相補」的感覺，與接觸西方數學之前的中國算書如出一轍。事實上，除了這個卷九的例子之外，南秉吉在卷一「圭田」一問的術文之後，也寫下了「半廣者，以盈補虛，取其中平之廣也」，這裡基本上也是使用了劉徽的術語及圖形轉換想法。

前段這個卷九的證明，與劉徽注以及《數理精蘊》皆不同，那麼，這是否為南氏的創見呢？筆者試圖查考流傳至朝鮮王朝，當時數學家所熟悉的算書。朝鮮世宗時期(1418-1450)所建立的算學取才科目為《詳明算法》、《算學啓蒙》、《楊輝算法》、《五曹算經》、《地算》等。²⁸除了《地算》不詳之外，另外四本書都有現存的版本。²⁹既然這是朝鮮時代算學取才

²⁸ 甄鸞，《五曹算經》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍彙編》數學卷第一分冊，河南教育出版社（鄭州），1993 年。其餘引自兒玉明人編，《十五世紀朝鮮刊 銅活字版數學書》，富士短期大學出版部（東京），1966 年。

科目，我們自然認為南秉吉也熟悉這些書的內容。不過，根據筆者查考的結果，《九章術解》卷九第 11 題並未出現在這些算書中。倒是在楊輝的另一著作 – 《詳解九章算法》 – 就有這一題，而且證明方式與南秉吉的方法類似但不完全相同。³⁰我們不知道這本書是否曾傳入朝鮮，也不知道南秉吉是否讀過，但這或許不是巧合。無論如何，南氏應該是認為這樣的證明對讀者最容易理解，才會如此註釋。至於這是否為南氏的創見，還是他將楊輝的證法轉化回自己的註解，則仍需要更多的研究。

三、南秉吉的創見

卷九中引人注目的 11 題，是南秉吉註解中很有中算特色的一題，但我們不能確定那是他的創見。那麼，整本《九章術解》，除了引用中西數學之外，有無南氏自己的想法呢？另一個有可能的答案，應該是在卷八「方程」章之中。

《九章算術》的方程章討論的內容，以現代術語來說，就是線性聯立方程式的解法。在中算史上，將方程式論集大成的，是金元時期數學家李冶 (1192-1279) 的《測圓海鏡》一書內的「天元術」。而西方數學在明清兩代大量傳入中國之後，中國人也從中學到西方數學解方程式的方法，在《數理精蘊》中，這類方法被稱為「借根方」。南秉吉曾寫下一本《無異解》，從「天元術」與「借根方」的對比，來說明兩種方法其實「無異」。³¹有史家甚至推崇《無異解》為韓國數學史上第一篇數學研究論文。³²由此可知，南秉吉對方程式論，的確有他自己的見解。

如同其他各章，南秉吉也用《數理精蘊》的內容來註釋方程章，這裡他用的是《數理精蘊》的〈方程〉與〈借根方比例〉。在整卷的註解中，南氏大多是說明解題程序，以數字列式運算得到答案，至於針對算理的解釋，只出現在他對「正負術」的註解。在術文「同名相除，異名相異」之後，南氏做了下面的說明：

以此行之多算減彼行之多算，則以此行之少算加彼行之多算，然後此行之實數適得減盡。蓋多算之減去也，已過實數，故以此之少加彼之多，以相報補也。若此行之少算值彼行之少算，則固當直減；而此行之多算值彼行之少算，則必加之，蓋少算之加，即實數之減也。³³

至於「正負術」後半的「異名相除，同名相異」，南氏就以「其法一切相反也」一筆帶過。以今日的角度來看，南秉吉的解釋雖然大致正確，但未完全切中要領。不過，《數理精蘊》，

²⁹ 引自葉吉海，《李朝世宗時期的朝鮮算學》，台灣師範大學碩士論文（未出版），2002 年，頁 32、59-72。

³⁰ 楊輝，《詳解九章算法》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊，河南教育出版社（鄭州），1993 年，頁 978。

³¹ 洪萬生，〈《無異解》中的三案初探：一個 HPM 的觀點〉，《科學教育學刊》，中華民國科學教育學會（高雄），2000 年，第三期，頁 215-224。

³² 金容雲主編，《韓國科學技術史資料大系 – 數學篇(6)》，驪江出版社（首爾），1985 年，頁 4。

³³ 南秉吉，《九章術解》，頁 458。

以及《算法統宗》、《同文算指》，乃至於梅文鼎所作之《方程論》等提及方程之著作，均未對此做出解釋。³⁴如果我們再結合他對「天元術」與「借根方」的理解，那麼，南氏對「正負術」的注文，應該是他自己的創見。

四、南秉吉註釋的不足

從上面的分析看來，南秉吉似乎很努力地嘗試讓當代的讀者瞭解《九章算術》。除了運用《數理精蘊》的知識，運用劉、李注與他少數的創見之外，他在很多地方都附上了詳細的計算過程，或許這是他希望從數字的演算之中，帶領讀者看出術文的意義，從而降低理解的門檻。不過，如果要在雞蛋裡挑骨頭的話，那麼，南氏的註解的確還是出現一些不足之處。

《九章算術》劉徽與李淳風的註釋中，最精彩的地方之一，是他們對球體積的證明，以及應用極限概念，證明幾種多面體的體積。南秉吉雖然讀過劉、李注，但是，有關這兩部分，他似乎未能完全瞭解。在卷四「開立圓術」之後，南秉吉的註釋說：

十六者，方率四自乘之術也；九者，圓率三自乘之數也。究其實，則在徑一圍三之律，當倍積為實，立方開之得丸徑也。³⁵

這是說當 $\pi = 3$ 時，術文所給的算法有誤，應該是球直徑 $d = \sqrt[3]{2V}$ ，其中 V 為球體積。這裡的理解是沒有問題的。但是，他接下來並未如劉、李二人一般嘗試證明球體積公式：

蓋球體外面積應為球徑平圓面積四倍，即方面積三倍也，且以外面積與半徑相乘得數，以三歸之，即球積也。夫以三與半乘之，則得立方積一箇半，而又以三歸之，則球積必居立方積之半，故倍積為實，立方開之也。³⁶

他首先引用《數理精蘊》中「球體外面積應為球徑平圓面積四倍」、「外面積與半徑相乘得數以三歸之即球積」的公式。³⁷接著，他再以計算說明，何以「倍積為實立方開之」即可得圓徑。如果讀者能接受《數理精蘊》的公式，如此說明當然很清楚，但是，他並未嘗試利用甚至改良劉、李注來證明球體積，也沒有說明《數理精蘊》的公式何以正確，這是可惜之處。

另外，在多面體體積部分。劉徽是利用極限方法，證明陽馬與鼈臠的體積比為 2:1，再以之推導出其他常用多面體公式。南秉吉仍是直接引用《數理精蘊》的公式。在卷五陽馬的術文之後，南秉吉寫道：

³⁴ 林倉億，〈《九章術解》卷八校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2003 年，第二、三期，頁 6。

³⁵ 南秉吉，《九章術解》，頁 349。

³⁶ 南秉吉，《九章術解》，頁 349。

³⁷ 蘇惠玉，〈《九章術解》卷四校勘〉，頁 9-10。

此陽馬與方錐形雖不同，而法則一也。蓋方錐形尖在正中，陽馬形尖在一隅，然大凡體形，其底面積等，高度又等，則形雖不同，而積則一也。夫一正方體剖之得二壅堵，一壅堵體剖之得一陽馬、一鼈臠，而一陽馬剖之又得二鼈臠，是陽馬體為壅堵體三分之二，即為正方體之三分之一，而鼈臠體為壅堵體三分之一，即為正方體之六分之一也，乃合二鼈臠成一陽馬，合三陽馬成一正方體，故三而一也。³⁸

這裡的敘述與《數理精蘊》中說明陽馬與鼈臠的文字十分接近。³⁹然而，《數理精蘊》中關於方錐、陽馬、鼈臠等多面體，均是利用長、寬、高均等的「標準棊」進行「棊驗法」，並未討論長、寬、高不等的非標準棊。但南氏嘗試要應用至一般的情形。他說陽馬與方錐若底面積等，高亦相等，則體積相等，但未說明他是應用了祖暅原理，或是其他方法得知。接著，他說壅堵分成一陽馬與一鼈臠，而陽馬又可分為二鼈臠，所以，陽馬體積為壅堵的三分之二。但是，在一般非標準棊的情形，從壅堵先切出的鼈臠，與陽馬後來切出的兩鼈臠並不全等，我們無法直接看出它們體積相等。可見，這裡南秉吉是完全接受了《數理精蘊》的結論來註釋，但並未清楚瞭解這些方法的限制。他似乎也未能瞭解，或是不喜歡劉徽的極限方法，因此並未對其做說明，這是另一個可惜之處。

伍、結語：南秉吉註解的整體風格與綜合評價

綜觀南秉吉為《九章算術》所做的註解，我們很容易發現，他並未落入「中法」與「西法」的爭論，不侷限於其中一種方法論，而是非常自由地、彈性地選擇他認為適合的方式來註解。在《數理精蘊》中若提及相關內容，如圓面積、四率法、體積公式、勾股定理證明等，他都會引用；而若是《數理精蘊》沒有類似問題，但他認為劉、李注仍然適合註解，他也從善如流。此外，或許是因為南秉吉對方程式論與勾股術比較有研究，他曾寫下《無異解》與《劉氏勾股術要圖解》二書，也在《九章術解》中對正負術與部分勾股問題，提出了可能是他自己的創見。而且，南秉吉也很詳細地將許多問題的計算過程寫出，讓讀者清楚地看到使用術文的運算過程。南氏註解唯一比較可惜的地方是，他似乎未能完全理解劉徽的極限方法，使得他在體積公式的地方只能完全引用《數理精蘊》，而未對劉、李注做出更清楚的解釋。

綜上所述，我們可以推想，由於南秉吉作注的目的，是要讓後人更容易明白《九章算術》，所以，他的重點擺在使用任何可以清楚解釋的方法，而不是如劉徽一般嘗試建立自己的知識體系。雖然他似乎有未了解劉徽，也有註釋仍不完全的地方，但整體來說，這本書

³⁸ 南秉吉，《九章術解》，頁 362-363。

³⁹ 楊瓊茹，《〈九章術解〉卷五校勘》，頁 6。

對當時想要研讀《九章算術》的朝鮮知識份子而言，應該是一本頗為清楚的註解書。再者，南秉吉所處的十九世紀中葉，雖然中國仍是朝鮮的宗主國，但中國也已經吸收了許多西方知識。或許因為如此，南秉吉比起朝鮮王朝前面五百年的知識份子來說，更能將「中法」與「西法」平等對待，找尋合適的方法，而不用考慮數學以外的因素。

有關南秉吉以及同時期朝鮮數學家著作，未來仍須要數學史家做進一步的研究，如此，我們或許才能對近代韓國數學乃至於東亞數學的發展、交流與轉化，提供更細緻的圖像。

主要參考文獻

中、日文部分

- 一、劉徽注、唐·李淳風釋，《九章算術》，收入孔繼涵《微波榭叢書》，1777 年。
- 二、劉徽注、唐·李淳風釋，《九章算術》，收入文淵閣《四庫全書》，1784 年。
- 三、兒玉明人編，《十五世紀朝鮮刊 銅活字版數學書》，富士短期大學出版部（東京），1966 年。
- 四、金容雲、金容局，《韓國數學史》，楨書店（東京），1978 年。
- 五、南秉吉，《九章術解》，收入金容雲主編，《韓國科學技術史資料大系 - 數學篇(6)》，驪江出版社（首爾），1985 年。
- 六、南秉吉，《劉氏勾股述要圖解》，收入金容雲主編，《韓國科學技術史資料大系 - 數學篇(6)》，驪江出版社（首爾），1985 年。
- 七、金容雲主編，《韓國科學技術史資料大系 - 數學篇(6)》，驪江出版社（首爾），1985 年。
- 八、李潢，《九章算術細草圖說》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第四分冊，河南教育出版社（鄭州），1993 年。
- 九、康熙御制，《數理精蘊》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第三分冊，河南教育出版社（鄭州），1993 年。
- 十、郭書春，《九章算術題要》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊，河南教育出版社（鄭州），1993 年，頁 79-87。
- 十一、郭書春，《古代世界數學泰斗劉徽》，明文書局（台北），1995 年。
- 十二、甄鸞，《五曹算經》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊，河南教育出版社（鄭州），1993 年。
- 十三、楊輝，《楊輝算法》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊，河南教育出版社（鄭州），1993 年。
- 十四、楊輝，《詳解九章算法》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊，河南教育出版社（鄭州），1993 年。
- 十五、劉徽注、唐·李淳風釋，武英殿本《九章算術》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊，河南教育出版社（鄭州），1993 年。
- 十六、洪萬生，《〈無異解〉中的三案初探：一個 HPM 的觀點》，《科學教育學刊》，中華民國科學教育學會（高雄），2000 年，第三期，頁 215-224。
- 十七、郭書春、劉鈍點校，《算經十書》，九章出版社（台北），2001 年。
- 十八、洪萬生，《十八世紀東算與中算的一段對話：洪正夏 vs. 何國柱》，《漢學研究》，漢學研究中心（台北），2002 年，第二期，頁 57-80。
- 十九、葉吉海，《李朝世宗時期的朝鮮算學》，台灣師範大學碩士論文（未出版），2002 年。

- 二十、蘇俊鴻，〈韓國數學文本《九章術解》卷一校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2002 年，第十一期，頁 3-7。
- 二十一、陳鳳珠，〈《九章術解》卷二校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2002 年，第十一期，頁 8-12。
- 二十二、蘇意雯，〈《九章術解》卷三校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2002 年，第十二期，頁 3-7。
- 二十三、蘇惠玉，〈《九章術解》卷四校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2002 年，第十二期，頁 8-10。
- 二十四、楊瓊茹，〈《九章術解》卷五校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2003 年，第一期，頁 3-7。
- 二十五、葉吉海，〈《九章術解》卷六校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2003 年，第一期，頁 8-13。
- 二十六、黃清揚，〈《九章術解》卷七校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2003 年，第二、三期，頁 1-4。
- 二十七、林倉億，〈《九章術解》卷八校勘〉，《HPM 通訊》，師大數學系（台北），2003 年，第二、三期，頁 4-9。
- 二十八、洪萬生，〈數學文化的交流與轉化：以韓國數學家南秉吉 (1820-1869) 的《算學正義》為例〉，《師大學報：人文與社會類》，國立台灣師範大學（台北），2003 年，第一期，頁 21-38。

英文部分

1. Heath, Thomas L. *Euclid: Thirteen Books of The Elements*. New York: Dover Publications, INC (New York), 1956.
2. Horng, Wann-Sheng. "Sino-Korean transmission of mathematical texts in the 19th century: A case study of Nam Pyong-gil's *Kugo Sulyo Tohae*", *Historia Scientiarum* 12(2), The History of Science Society of Japan (Tokyo), 2002, pp. 87-99.
3. Oh, Young Sook. "*Suri chōngon pohae* (數理精蘊補解): An 18th Century Korean Supplement to *Shuli jingyun* (數理精蘊)". In W. S. Horng, Y. C. Lin, T. C. Ning & T. Y. Tso (Eds.). *Proceedings of Asia-Pacific HPM 2004 Conference*, Taichung: National Taichung Teachers College (Taichung), 2004.
4. Jun, Yong Hoon, "Mathematics in context: A case study in early nineteen-century Korea", *Science in Context* 19, Cambridge University Press (Cambridge), 2006, pp. 475-512.
5. Volkov, Alexei. "Geometrical diagrams in traditional Chinese mathematics". In F. Bray, V. Dorofeeva-Lichtmann & G. Metailie (Eds.). *Graphics and Text in the Production of Technical Knowledge in China*, Brill (Leiden), 2007, pp.425-459.

附錄：《九章術解》卷九問題及術文與《九章算術》各版本內容比對

書\版 題號	九章術解	聚珍本	四庫本	微波榭本	李潢校本
1~3	術曰勾股各自乘并而開方除之即弦	句股術曰句股各自乘并而開方除之即弦	句股術曰句股各自乘并而開方除之即得	句股術曰句股各自乘并而開方除之即弦	句股術曰句股各自乘并而開方除之即弦
4	答曰二尺四寸五分	答曰二尺四寸	答曰二尺四寸	答曰二尺四寸五分	答曰二尺四寸五分
5	葛長	葛長	各長	葛長	葛長
	七周乘三圍	七周乘七圍	七周乘三圍	七周乘三圍	七周乘三圍
7	去本八尺	去本八尺	本去八尺	去本八尺	去本八尺
	答曰一丈二尺二分一尺之一	答曰一丈二尺六分一尺之一	答曰一丈二尺六分一尺之一	答曰一丈二尺二分一尺之一	答曰一丈二尺二分一尺之一 ⁴¹
8	高與桓齊	上與桓齊	上與桓齊	高與桓齊	高與桓齊
	問木幾何	問木長幾何	問木長幾何	問木幾何	問木幾何
10	問門廣幾何	問門廣幾何	開門廣幾何	問門廣幾何	問門廣幾何
	一丈一寸	一尺一寸	一尺一寸	一丈一寸	一丈一寸
12		置於卷末	置於卷末	位置相同 ⁴²	位置相同
13	半其餘	半餘	半餘	半其餘	半其餘
14	以三乘七爲乙東行率	以三乘七爲乙東行率	以三乘七爲乙東行率	以三乘七爲乙東行率	以三乘七爲乙東行率
15	十七分步之九	十七分步之九	十一七分步之九	十七分步之九	十七分步之九
	得方一步	得方	得方	得方一步	得方一步
16	得徑一步	得徑	得徑	得徑一步	得徑一步
17	太半	大半	太半	太半	太半
	實如法得一步	實如法得一	實如法得一	實如法得一步	實如法得一步
18	東門南至隅步數	東門南至隅步數	東門南至隅數步	東門南至隅步數	東門南至隅步數
19	今有邑方	今有邑方	今有一方	今有邑方	今有邑方
20	各中開門	各中開門	各出開門	各中開門	各中開門
	問邑方幾何	問邑方幾何	門邑方幾何	問邑方幾何	問邑方幾何
	以出北門步數	以出北門步數	以北門步數	以出北門步數	以出北門步數
21	四千	四千	四八	四千	四千
	以三乘五	以三乘五	三三乘五	以三乘五	以三乘五
	實如南行率得一步	實如南行率得一	實如法而率得一	實如南行率得一步	實如南行率得一步

⁴⁰ 李潢在本句之後加注：「潢按五分二字衍」。

⁴¹ 李潢在本句之後加注：「潢按當作一丈二尺六分尺之一」。

22	令一丈自乘爲實以 三寸爲法	令一丈自乘爲實以 三寸爲法	令一丈自乘實如法 三寸爲法	令一丈自乘爲實以 三寸爲法	令一丈自乘爲實以 三寸爲法
	有	今有	今有	有	有
23	以人去木三里爲法 實如法而一	以人去木三里爲法 實如法而一	以人去木三里爲法 法如法而一	以人去木三里爲法 實如法而一	以人去木三里爲法 實如法而一
	有	今有	今有	有	有
24	入徑四寸	入徑四尺	入徑四寸	入徑四寸	入徑四寸
	實如法得一丈	實如法得一	得一法得一	實如法得一寸	實如法得一寸