虛實交疊的世界—由一元二次方程式根與係數關係說起

劉君燦
（黎明技術學院，本會會友）

一元二次方程式是國中或初中必須要學會解的方程式之一，所謂方程式是有變數有等號，可以解出變數的值或與其他變數關係的數式，而一元就是只有一個變數，通常以 x 表示，所謂二次就是變數 x 的最高次方為二次，這樣一來一元二次方程式的通式就是 $ax^2+bx+c=0$，式中 a、b、c 是常數，各為 x^2 項，x 項的係數和常數項。因為是二次方程式，所以 x 有兩個解，或說有兩個根（root）， 這裏 $x=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a$，分子中有一個根與係數的關係，而 b^2-4ac 就叫做根性質的判別式。

這是怎麼說的呢？因為如果 $b^2-4ac>0$，就有平方根，x 的兩個解就是實數，或正或負，或為分數，小數，甚至為無理數，包含$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ 等。如果 $b^2-4ac=0$，那 x 的兩個根都是 $-b/2a$，為兩相等實根；如果 $b^2-4ac<0$，那負數開平方會為虛數，x 的兩個根就成為 $P\pm iQ$ 的複數，其中 $i=\sqrt{-1}$，為虛數基本單位，$P=-b/2a$，Q 為 $|b^2-4ac|$（這叫絕對值，永遠為正）的平方根除以 2a。因此 b^2-4ac 之 >0，$=0$，<0，會影響根之為兩實數不等根，兩實數等根，或兩複數根，所以 b^2-4ac 就成為根與係數關係中的判別式。

當我初中學到解一元二次方程式時，就十分驚異常係數值稍稍的變動就影響了根之為實數為虛數，也常常躺在台中市省立體育場的草坪上想，這是不是表示我們所處的世界可由幾個常數值大小的變異就或實或虛，甚至虛實交疊是不是就是這個複雜世界的實質，因為老師告訴我們數學是用來描述這個世界的，因此數的虛實很可能就是世界的虛實和複雜。

初中時期的我頂多就只能想到這裏，但已夠我雀躍的了，我雀躍時兩手上下擺動，弟妹們笑說是「蝴蝶飛」，我就以「莊周夢蝶，蝶夢莊周，豈莊周為蝶乎，或蝶為莊周乎」來笑語，我們的夢也許就是生活世界的一個變形投射的表達吧！！

到了高一，學了三 S 平面幾何，才曉得各種圖形，如線段長短，周邊的長都是實的正值，而勾 3 股 4 弦 5 的畢氏定理也讓我瞭解$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ 的無理數也可由直角三角形斜邊的平方為兩股平方的和中作圖出來，但三角學只有小於直角（為 90°）的角其正弦，餘弦，正切，餘切，正割，餘割都為正數，因為它們都為直角三角形一角對邊，鄰邊，斜邊的比例值。不過平面幾何中「點只有位置而無大小，線只有長短而無寬狹，面只有廣度而無厚薄」及一些公理，如平行公設等使我十分好奇就是了。

到了高二，三 S 立體幾何讓我有了三度空間的立体感，也曉得怎樣在平面上去作三度空間的圖形關係立体表達，但這些仍然一切都是正值的。

到了高三，學了解析幾何學，才知道我們高二代數中所解的一切方程式，都可以直角坐標或極坐標來表示，也才瞭解解析幾何代表形與數的一大結合，二次曲線之為正圓，橢圓，拋物線，雙曲線，由其 x，y 係數正負及本身很容易就看得出來，但曲線長短及面積仍然是正值。不過直角坐標除了原點外，x 軸，y 軸都可正負兩端無限延申，好像這世界可無限展延一樣。

這時候我想到了一些問題，即「顧名思義」的「正名」問題，這倒是高中國文所讀到孔子的偉大思想。高中時也讀了劉逑先先生所寫的«語意學與真理»，瞭解了語言這名言與真實世界間關係，一切的虛虛實實，不禁使我想到爲什麼四則運算加減乘除之所以命名，它們結果和，差，積，商之所以命名，以及分數爲何叫分數，小數爲何叫小數，有理數爲何「有理」，無理數爲何「無理」，爲什麼有理數和無理數的總和叫實數，又爲什麼一根無限延申的直線可以代表所有正負實數……等這一切「顧名思義」的問題。

但聯考在即，那時的圖書資源又十分缺乏，我只知道有理數是可以 b/a 這分數形式表達的，無理數免不了要開根號，但有理數與無理數的總和這實數爲何可以一條直線表達就不得其解了。

考上台大，我們物理系與數學系學生一同上 Apostal 的微積分，Apostal 的微積分題目繁多實在，並不難，但因爲學生多爲中學名校的前茅，老師不按牌理出牌，用後牛頓時代極其抽象嚴謹的方法來証明諸如實數系的連續性（continuity）和函數的連續性；所謂實數的連續性是任兩個實數無論如何接近，中間必還有實數，這也就是爲什麼可以一條直線表所有實數的原因，因爲直線包含無限多個點，任何兩點之間必還有另外一個點，即點動成線，解析幾何也是在此數與形對應的可能下成立的。

另外我們也瞭解了可以微分的函數必是連續函數，或至少片斷連續（piecewisely continuous），即只有片斷相接的點無值，但因爲點只有位置，沒有大小，可視爲片斷連續。本來函數表示至少兩變數以上的相互關係式，或說一變數爲另一變數或幾個變數的函數；所謂連續性函數即任兩個函數值之間必定還有函數值，一如任兩個實數間必還有實數，這叫做「中間值定理」。

至於微分即表示一變數對另一變數的變化率，而可以微分，或說變化率存在的函數必定是連續性函數，這裏就牽涉到無限小和極限值是否存在的問題，一變數 x 和其極鄰近值 $x+\Delta x$ 間，如果函數 $f(x+\Delta x)-f(x)$ 的極限值對 $\Delta x\to 0$ 時存在，則表示其變化率存在，也就是微分存在，諸如存在（existence）和唯一（unigueners），即是否只存在一個值也成了我們探討的對象。至於積分則是微分的反運算，不定積分（indefinite integral）是找出連續函數，或求一微分方程式的通解，其中必含有不定值的積分常數，定積分（definite integral）則是自變數端值固定的積分，將通解函數帶入自變數的端值可以得到一定值。(作者校對)