

關於《算經十書》的幾個問題

郭書春

(中國科學院自然科學史研究所)

《算經十書》是漢唐算經的總集，它在唐初稱為「十部算經」，清中葉戴震校勘微波榭本始有《算經十書》之名。「十部算經」最遲在唐中葉即有內容基本相同而文字稍有歧異的幾個抄本。北宋取其一刊刻，南宋又翻刻。明初取另一抄本抄入《永樂大典》。微波榭本《算經十書》含有戴震輯錄的舛誤和修辭加工，以及錯校。錢寶琮校點的《算經十書》以微波榭本為底本。郭書春等點校的《算經十書》則分別以南宋本、汲古閣本、戴震輯錄本為底本。《算經十書》的體例極不同一，許多人說它們都是一題、一答、一術的應用問題集，不符合實際情況。《算經十書》術文的抽象程度差異相當大，《九章算術》的主體部分的術文都是關於一類問題的極為抽象、概括、具有普適性的算法，而其另一小部分和《孫子算經》、《五曹算經》、《緝古算經》、《夏侯陽算經》等的術文都是演算細草。劉徽等數學家的工作帶有“為數學而數學”的性質，具有純數學理論研究的傾向。《算經十書》中實際上有所謂數學家的數學和日用數學的分野。

關鍵字：算經十書，十部算經，數學理論，數學家的數學

《算經十書》是漢唐算經的總集，奠定了中國傳統數學基本框架和理論基礎，是中國古代數學史和文化史研究的重要課題。可是學術界對《算經十書》的名稱和體例、著作性質等方面存在著某些似是而非的說法。現就這些問題談一些看法，就教於同好。

壹、《算經十書》的名稱和內容

學術界常有唐李淳風等整理《算經十書》的說法。但是，《算經十書》是清中葉之後才有的名稱，唐初稱為「十部算經」。「淳風復與國子監算學博士梁述、太學助教王真

儒等受詔注《五曹》、《孫子》十部算經。書成，高宗令國學行用。」¹當時所謂「十部算經」包括漢《周髀算經》、《九章算術》、魏《海島算經》、南北朝《孫子算經》、《夏侯陽算經》、《綴術》、《張丘建算經》、《五曹算經》、《五經算術》和唐《緝古算經》。

宋、元、明亦未見《算經十書》的名稱。元及明初有「十經」之名。元趙城云「淳風之解十經」²。明趙瑀云：《九章》之後，「又有所謂《張丘建》、《夏侯陽》、《緝古》、《五曹》、《五經》、《周髀》、《海島》、《數術記遺》者，謂之九經。並《九章》為十經。」³明中葉後又稱為「十書」。聶大年云：「十書今已無傳，惟《九章》之法今存。」⁴明末程大位云：「宋元豐七年刊十書入秘書省。」⁵所列「十書」與趙瑀「十經」相同。可見所謂「十經」或「十書」都已將《數術記遺》列入，與唐朝有所不同。這十部算書在明中葉之後大部分缺佚，唯《周髀算經》、《數術記遺》還有刻本。而所謂「《九章》之法」是如吳敬《九章算法比類大全》之類的著作從宋元有關著作中抄錄的，文字已面目全非。實際上《九章算術》已不在社會上流傳。當時還存在上半部《九章算術》的孤本，可是藏於藏書家的書閣，一般的讀書人是看不到的。

清乾隆間，孔繼涵刊刻微波榭本《算經十書》。這是歷史上第一次出現《算經十書》之名。書末刻有「大清乾隆三十八年癸巳秋闕里孔氏依汲古閣影宋刻本重雕」⁶。錢寶琮揭穿了孔氏的騙局，指出微波榭本不是汲古閣本的翻刻本，而是戴震的校勘本，刻書年代至早在 1775 年之冬⁷。筆者經過考察認為，戴震整理《算經十書》至早在 1776 冬至 1777 年春，而孔氏刻書當在 1777 年或其後。⁸微波榭本《算經十書》以《周髀算經》、《九章算術》等 9 部為正文，以《數術記遺》為附錄，還附有戴震自己的《策算》和《勾股割圓記》。

1963 年北京中華書局出版錢寶琮校點的《算經十書》⁹，以《周髀算經》、《九章算術》等 8 部為正文，以《數術記遺》、《夏侯陽算經》為附錄。

1998 年遼寧教育出版社出版郭書春、劉鈍點校的簡體字本《算經十書》，2001 年臺灣九章出版社¹⁰出版其國字修訂本《算經十書》的構成與錢校本相同。

貳、《算經十書》的版本

李淳風等整理的「十部算經」最遲在唐中葉即已流傳著不同的抄本。¹¹其中一種抄

¹ [後晉] 劉昫：《舊唐書》〈李淳風傳〉卷 79。北京：中華書局，1975 年，頁 2719。

² [元] 趙城：朱世傑《算學啟蒙》序。見：郭書春主編：《中國科學技術典籍通彙·數學卷》，第 1 冊，頁 1123。河南教育出版社，1993 年。

³ [明] 趙瑀：嚴恭《通原演算法》序。《諸家算法及序記》（抄本）。見：郭書春主編：《中國科學技術典籍通彙·數學卷》，第 1 冊，頁 1455。

⁴ [明] 聶大年：《九章算法比類大全》序。郭書春主編：《中國科學技術典籍通彙·數學卷》，第 2 冊，頁 5。

⁵ [明] 程大位：《算法統宗》〈算經源流〉。郭書春主編：《中國科學技術典籍通彙·數學卷》，第 2 冊，頁 1218。

⁶ 算經十書，[清] 戴震校勘。孔繼涵刻微波榭本，1777 年或其後。

⁷ 錢寶琮：戴震算學天文著作考。《浙江大學科學報告》第一卷第一期，頁 1-21。《李儼錢寶琮科學史全集》第九卷，頁 143-167。遼寧教育出版社，1998 年。

⁸ 郭書春：《九章算術》版本卮言。臺灣《第二屆科學史研討會彙刊》，頁 187-210。又見：匯校《九章算術》增補版，頁 647-711。遼寧教育出版社、臺北九章出版社，2004 年。

⁹ 算經十書，錢寶琮校點。北京：中華書局，1963 年。《李儼錢寶琮科學史全集》第四卷。

¹⁰ 算經十書，郭書春、劉鈍點校，簡體字本。瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年。國字修訂本。臺北：九章出版社，2001 年。

¹¹ 郭書春：李籍《九章算術音義》初探。《自然科學史研究》，第 8 卷（1989 年）第 3 期。

本在北宋元豐七年 (1084 年) 由秘書省刊刻，當時《綴術》、《夏侯陽算經》早已亡佚，前者闕如，後者因唐中葉的一本算書開首有「夏侯陽曰」而被誤認為是書而刻入。北宋秘書省刻本今不存。南宋鮑澣之於慶元六年 (1200 年) 和嘉定六年 (1213 年) 先後翻刻了北宋秘書省刻本《九章算經》¹²、《周髀算經》等 9 部算經，五年還刻了《數術記遺》。南宋本至明末闕《九章算術》後四卷及劉徽序和《海島算經》、《五經算術》。¹³清康熙二十三年 (1684 年) 汲古閣主人毛扆影抄了南宋本，世稱汲古閣本¹⁴。唐中葉的另一種抄本於明永樂六年 (1408 年) 被分類抄入《永樂大典》「筭」字條。今存卷 16343,16344。¹⁵有人說明初將南宋本抄入《永樂大典》。事實上，南宋本與《永樂大典》本的母本是兩種內容基本相同而文字稍有歧異的不同抄本。這從《九章算術》的南宋本、《永樂大典》本及其戴震輯錄本¹⁶中帶有指標性的幾個字詞的異同及其與李籍《九章算術音義》¹⁷的比較即可看出。如卷二「幹」，李籍說「一本作幹」，南宋本作「幹」，戴震輯錄本作「幹」。卷五「臙」，李籍說「或作臙，非是」。「臙」，南宋本作「臙」，戴震輯錄本作「臙」。等等，都說明在唐中葉起碼有三個不同的抄本，李籍取其一作《音義》，明初取此本抄入《永樂大典》，而北宋秘書省刻本的底本是另一抄本。

清乾隆三十八年 (1773 年) 開《四庫全書》館，次年戴震從《永樂大典》輯錄出《周髀算經》、《九章算術》、《海島算經》、《孫子算經》、《夏侯陽算經》、《五曹算經》、《五經算術》等 7 部算經，加以校勘，成為《武英殿聚珍版叢書》本和《四庫全書》本的底本，其中《周髀算經》以明刻本為底本，以戴震輯錄本參校而成。1776 年秋，戴震借到汲古閣本，除《九章算術》後四卷及劉徽序、《海島算經》、《五經算術》仍以戴震輯錄本為底本外，其餘算經皆以此本為底本重新校勘，是為微波榭本《算經十書》。微波榭本為避孔子諱，將《張丘建算經》改為《張邱建算經》。

錢校本《算經十書》實際上以微波榭本在 1900 年的一個翻刻本為底本，因此有戴震輯錄之粗疏、修辭加工和該翻刻本特有的錯字等版本上的失誤¹⁸。

郭書春、劉鈍點校的《算經十書》，其《九章算術》的前五卷、《周髀算經》、《孫子算經》、《張丘建算經》、《五曹算經》、《數術記遺》等 5 部半以南宋本為底本，《九章算術》後半部及劉徽序以楊輝本為底本，《緝古算經》、《夏侯陽算經》以汲古閣本為底本，《海島算經》、《五經算術》以戴震輯錄本為底本。

參、《算經十書》的體例

人們常將《九章算術》等著作的體例概括為應用問題集，並且說都是一題、一答、

¹² 關於鮑澣之翻刻《九章算經》的年代，學術界過去都認為是嘉定六年 (1213 年)。這實際上是翻刻《周髀算經》等算經的時間。鮑澣之寫《〈九章算經〉後序》是在慶元六年，刻《九章算經》當在是年。

¹³ 所遺存 5 部半南宋本算經，分別藏上海圖書館和北京大學圖書館。1980 年由文物出版社影印成《宋刻算經六種》。

¹⁴ 汲古閣本乾隆間傳入清宮，藏天祿琳琅閣。1932 年北平故宮博物院影印成《天祿琳琅叢書》，世稱天祿琳琅本。原本存臺北故宮博物院。

¹⁵ 此 2 卷今藏英國劍橋大學圖書館。1960 年北京中華書局影印收入《永樂大典》。

¹⁶ 戴震輯錄本本指戴震 1774 年從《永樂大典》抄錄的《九章算術》等 7 部算經。今不存。筆者依據《武英殿聚珍版叢書》本和《四庫全書》文淵閣本對校，並按照戴震寫的校勘記恢復《永樂大典》本原文而重新錄出。它雖不會完全同於《永樂大典》本，但可以大體反映《永樂大典》本的狀況。

¹⁷ 〔唐〕李籍：《九章算術音義》。《武英殿聚珍版叢書》御覽本，見：郭書春主編：《中國科學技術典籍通彙·數學卷》，第 1 冊，頁 202-212。匯校《九章算術》增補版附錄一，郭書春匯校。遼寧教育出版社、臺灣九章出版社，2004 年。頁 819-853。

¹⁸ 郭書春：關於《算經十書》的校勘。《文史》，2000 年第四期，頁 119-132，中華書局。

一術。筆者對這種概括不敢苟同。實際上，《算經十書》的體例不能一概而論，需要具體分析。大體說來，有以下幾種情形：¹⁹

一、關於一類問題的抽象性術文統率若干例題的形式，往往是一術多題或一術一題。這是《九章算術》的主要內容所採取的形式。這裏又有不同的情形：

(一)、給出一個或幾個例題，然後給出一條或幾條抽象性術文，而例題中只有題目、答案，沒有演算的術文。以《九章算術》方田章合分術及其例題為例：

今有三分之一，五分之二。問：合之得幾何？

答曰：十五分之十一。

又有……

合分術曰：母互乘子，并以爲實。母相乘爲法。實如法而一。不滿法者，以法命之。其母同者，直相從之。²⁰

(二)、先給出抽象的術文，再列出幾個例題；而例題只有題目、答案，亦沒有演算術文。以《九章算術》商功章芻童術及其例題為例：

芻童、曲池、盤池、冥谷皆同術。

術曰：倍上表，下表從之；亦倍下表，上表從之；各以其廣乘之。并，以高若深乘之，皆六而一。

今有芻童，下廣二丈，表三丈；上廣三丈，表四丈；高三丈。問：積幾何？

答曰：二萬六千五百尺。

今有曲池……

(三)、先給出抽象性的總術，再給出若干例題；而例題包含了題目、答案、術文三項。其中的術文是總術的應用。以《九章算術》粟米章今有術及 31 個粟米互換題目為例：

今有術曰：以所有數乘所求率爲實，以所有率爲法。實如法而一。

今有粟一斗，欲爲糲米。問：得幾何？

答曰：爲糲米六升。

術曰：以粟求糲米，三之，五而一。

今有……

這三種情形覆蓋了《九章算術》中方田、粟米、少廣、商功、盈不足、方程等六章的全部，衰分、均輸章的衰分、均輸問題，以及勾股章的勾股術、勾股容方、容圓、測邑諸問題，約占全書的 80%。儘管其間的表達方式有差異，卻有三個共同特點：首先，在這裏術文是中心，是主體，題目是作爲例題出現的，是依附於術文的，而不是相反。其次，其術文非常抽象、嚴謹，具有普適性，換成現代符號就是公式或運算程式。第三，這些術文具有構造性、機械化的特點。因此，我們將之稱爲術文統率例題的形式。

二、應用問題集的形式，往往是一題一術。其術文的抽象程度也有所不同：

(一)、關於一種問題的抽象性術文。《九章算術》的一小部分、《海島算經》、《張丘建算經》等以及《緝古算經》的一部分如此。以《張丘建算經》卷下「河上蕩杯」問為例：

今有婦人於河上蕩杯，津吏問曰：“杯何以多？”婦人答曰：“家中有客，不知其數。但二人共醬，三人共羹，四人共飯，凡用杯六十五。”問：人幾何？

答曰：六十人。

¹⁹ 郭書春：關於中國傳統數學的“術”。高小山、李文林等主編：《數學與數學機械化》。濟南：山東教育出版社。2001年。頁 444—448。

²⁰ 匯校《九章算術》增補版，遼寧教育出版社、臺灣九章出版社，2004年。刪節號爲略去的例題。本文凡引《九章算術》的文字均據此。

術曰：列置共杯人數於右方，又置共杯數於左方。以人數互乘杯數，并，以爲法。令人數相乘，以乘杯數，爲實。實如法得一。²¹

其術文雖未離開杯、人等具體物件，但沒有具體數字的運算，對河上蕩杯這種問題都是適應的。

(二)、具體問題的算草。《九章算術》中衰分、均輸兩章的非衰分、均輸類問題的大部分題目，勾股章的解勾股形題目及「因木望山」等 4 個題目，以及《孫子算經》的卷中、下，《五曹算經》、《夏侯陽算經》的全部，《緝古算經》的一部分採取這種形式。比如《孫子算經》卷中有 4 個粟米互換的題目，與《九章算術》相同，卻不僅沒有總術「今有術」，而且每個題目的術文的抽象程度也顯然低於《九章算術》，完全是具體數字的演算細草。比如第 1 題的術文是：

術曰：置粟一斗，十升。以糲米率三十乘之，得三百升，爲實。以粟率五十爲法，除之，即得。²²

顯然，這些內容是以題目爲中心的，術文只是所依附的題目的解法甚至演算細草，儘管第(一)種的術文對某一種問題具有普適性，卻不具有《九章算術》大多數術文那樣高度的抽象性、廣泛的普適性的特點。

三、預備知識置於卷首。《九章算術》粟米章將「粟米之法」置於該卷卷首。《孫子算經》將算籌記數法、九九乘法表、籌算乘除法則等置於卷首。《夏侯陽算經》亦將預備知識置於卷首。

肆、數學家的數學與日用數學

《算經十書》的數學內容深淺參差不齊。《周髀算經》及其趙爽注、《九章算術》及其劉徽注、《海島算經》、《緝古算經》等是高深的數學著作，《孫子算經》、《張丘建算經》、《五曹算經》、《夏侯陽算經》等則比較淺顯。

《算經十書》的嚴謹程度也不同。《九章算術》的術文絕大多數十分嚴謹。但是，也有少數粗疏的甚或錯誤的術文。比如，與圓有關的面積、體積公式，都使用周三徑一，不準確；而弧田術、宛田術、開立圓術等則是錯誤的。劉徽《九章算術注》批評了這些粗疏或錯誤，表現了他的嚴謹學風。說劉徽注是現存中國傳統數學中最嚴謹的著作，是絲毫也不過分的。此外，《海島算經》、《孫子算經》、《張丘建算經》、《緝古算經》、賈本《夏侯陽算經》等大都繼承了《九章算術》算法嚴謹的傳統。但是，也有的著作相當粗疏，比如《五曹算經》，不僅不顧劉徽的批評和修正，繼續沿用《九章算術》的粗疏或錯誤的公式，而且又提出了一些更加違背算理的錯誤公式。比如對不等邊四邊形，用公式 $S = \frac{1}{2}(a+c) \times \frac{1}{2}(b+d)$ 求解，其中 a, b, c, d 是其四邊。²³其不循算理是明顯的。

因此，根據數學內容的深淺、演算法的嚴謹與否，以及對數學理論特別是數學證明的重視程度，《算經十書》中實際上有所謂數學家的數學和日用數學的分野。劉徽《九章算術注》是典型的數學家的數學。他「析理以辭，解體用圖」，在追求算法的精確、嚴謹上，大大超過《九章算術》，並且致力於嚴格的數學證明，顯然已經超出了數學應用的範疇，帶有「爲數學而數學」的性質，是具有純數學理論研究的傾向的著作。而《孫子算經》、《張丘建算經》、《五曹算經》、《夏侯陽算經》等則是日用數學。《九章算術》、

²¹ [北魏]張丘建：張丘建算經，郭書春點校。見：郭書春、劉鈍點校：《算經十書》，國字修訂本。臺北：九章出版社，2001年，頁340。

²² 孫子算經，郭書春點校。見：郭書春、劉鈍點校：《算經十書》，國字修訂本，頁270。

²³ [北周]甄鸞：五曹算經，郭書春點校。見：郭書春、劉鈍點校：《算經十書》，國字修訂本，頁353。

《海島算經》、《緝古算經》等則介於兩者之間，既是數學家的數學，又具有日常應用的性質。

伍、中國傳統數學發展的高潮與低潮

《算經十書》諸算經的編纂綿延 1000 餘年，跨越了中國傳統數學的兩個高潮時期，同時也經歷了兩個低潮，並且奠定了第三個高潮即宋元數學的基礎。

第一個高潮是春秋戰國西漢中國傳統數學框架的奠基時期，其標誌是《周髀算經》和《算數書》²⁴、《九章算術》的編纂，在分數四則運算法則、比例和比例分配方法、盈不足演算法、開平方法與開立方法、線性方程組解法、正負數加減法則、解勾股形和勾股數組等方面走在了世界的前面，有的超前其他文化傳統數百年，甚至上千年。《九章算術》的主體部分，尤其是採取抽象性術文統率例題的形式者的大部分內容是先秦完成的。這一看法在上世紀 80 年代筆者主要是通過對《九章算術》的體例、結構以及對劉徽注的內容的分析得出的，而在《算數書》的全部釋文公佈之後，有了實證的第一手資料。張蒼、耿壽昌編定《九章算術》是這個高潮的總結。《九章算術》奠定了中國傳統數學的基本框架，影響了此後約 2000 年間中國和東方的數學發展。它的成書標誌著中國取代古希臘成為世界數學研究的重心，標誌著研究數量關係為主以算法為中心的數學取代了以研究空間形式為主的公理化的數學。而西漢末年至東漢中期數學上創造性的成果則不多。

第二個高潮發生在東漢末魏晉南北朝時期。其標誌是東漢末徐岳的《數術記遺》、三國趙爽的《周髀算經注》、劉徽的《九章算術注》和南北朝祖沖之等的數學成就。《數術記遺》開始了改革計算工具的嘗試。劉徽以演繹邏輯為主要方法全面證明了《九章算術》的公式、解法，在數學證明中引入極限思想和無窮小分割方法，奠定了中國傳統數學的理論基礎。祖沖之的《綴術》應當是比劉徽注更高深的著作，遺憾地是，由於隋唐算學館的學官「莫能究其深奧，是故廢而不理」而失傳。²⁵這一時期人們還在《孫子算經》、《張丘建算經》中分別提出了一次同餘方程解法、百雞術等新的研究方向。隋唐設算學館，唐初李淳風等整理十部算經作為教材，是個貢獻。然而，隋唐數學落後於南北朝，除曆法制定中的內插法外，幾無創造。

第三個高潮發生在唐中葉至元中葉。賈本《夏侯陽算經》是唐中葉開始的改進籌算乘法的最初幾部著作之一。是為這個高潮的一個重要發展方向，並最遲在南宋導致珠算盤的產生²⁶，珠算盤在明代最終取代了算籌，完成了計算工具的改革，至今在中國、日本和東南亞地區人們的生產、生活中發揮著有益的作用。另外一個方向是高深數學的研究，創造了超前其他文化傳統幾個世紀，有的是歐洲 17，18，19 世紀的數學大師才

²⁴ 《算數書》是 1983 年 12 月至 1984 年 1 月在湖北省江陵（今荆州市）張家山 247 號漢墓中發現的約二百餘支數學竹簡。見：江陵張家山漢簡整理小組：《江陵張家山二四七漢墓竹簡》。北京：文物出版社，2001 年。又：郭書春：《算數書》校勘。《中國科技史料》第 22 卷第 3 期，頁 202-219，2001 年。

²⁵ [唐]李淳風：《隋書》〈律曆志〉。北京：中華書局，1973 年。頁 388。據此，筆者認為《綴術》失傳於隋唐。見：是《綴術》全錯不通還是王孝通莫能究其深奧。《數學史研究》，第 7 期，頁 20—25，內蒙古大學出版社、臺灣九章出版社，2001 年。

²⁶ 關於現代仍在使用的珠算盤產生於什麼時候，珠算史界和數學史界頗多爭論。珠算史界有東漢末年、唐中葉、北宋等各種說法。數學史界過去主張在元中葉。南宋劉勝年繪的《茗園賭市圖》中有珠算盤，其算珠、檔都清晰可見，珠算盤的產生不遲於南宋是無疑的。見《中華算盤精品鑒賞》，頁 125。西安：陝西科學技術出版社，1995 年。

完成的成就。這是大家都知道的，此不贅述。不過，十部算經奠定了宋元數學發展的基礎，則是無疑的。